TEORÍA DE LA MEDIDA

Sesión 06

Funciones Lebesgue medibles

Introducción

La formulación de Riemann del problema de la integral de una función condujo al surgimiento del concepto de contenido y a mostrar cómo se encuentra estrechamente vinculado al de integral, siendo prácticamente dos conceptos equivalentes en el sentido de que con cualquiera de ellos se puede introducir y desarrollar el otro.

Cuando más tarde Borel introdujo el concepto de medida cero y Lebesgue desarrolló una teoría de la medida, más general tanto que la de Jordan como la que había desarrollado Borel, fue posible para el mismo Lebesgue desarrollar una teoría de integración, ahora siguiendo un proceso inverso, es decir, partiendo del concepto de medida para llegar al de integral.

Al igual que la teoría de la medida resultó ser más general que la teoría del contenido, la teoría de la integral desarrollada por Lebesgue resultó ser más general que la teoría de la integral de Riemann.

Es necesario remarcar que Lebesgue desarrolló su teoría de la medida con el objetivo de resolver el problema de la integral que se había planteado. El mismo título del libro que publicó (*Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*) deja ver claramente que su interés principal era el del concepto de integral. En su libro hizo un estudio del desarrollo del concepto de integral y de las definiciones que diferentes autores habían propuesto, haciendo énfasis en las condiciones para que una función sea integrable. Aclaraba el por qué de su interés de no limitarse al estudio de las funciones para las cuales se puede dar una definición simple de la integral:

"si se quisiera limitarse siempre a la consideración de esas buenas funciones, habría que renunciar a la resolución de muchos problemas con enunciados simples planteados desde hace mucho tiempo. Es para la resolución de esos problemas, y no por amor a las complicaciones, que he introducido en este libro una definición de la integral más general que la de Riemann y que la incluye como caso particular."

Una vez definida la integral, Lebesgue se abocó a estudiar sus propiedades y a utilizarla para profundizar en el estudio de la teoría de funciones: "Como aplicación de la definición de la integral, estudié la búsqueda de funciones primitivas y la rectificación de curvas. A esas dos aplicaciones hubiera querido agregar otra muy importante: el estudio del desarrollo trigonométrico de las funciones; pero en mi curso, no pude dar a ese tema más que indicaciones tan incompletas que he juzgado inútil reproducirlas aquí." Con relación a su definición de integral, agregó:

"Aquellos que me leerán con empeño, lamentando tal vez que las cosas no sean más simples, pienso que estarán de acuerdo conmigo en que esta definición es necesaria y natural. Me atrevo a decir que es, en un cierto sentido, más simple que la de Riemann, tan fácil de asimilar como ella y que únicamente los hábitos adquiridos anteriormente pueden hacerla parecer más complicada."

La definición de Lebesgue de la integral tuvo su motivación directa en la relación que existe entre la integral de Riemann y la teoría del contenido.

Recordando que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función acotada no negativa y E la región en $\mathbb{R}^2$ acotada por el eje x y la gráfica de f entre a y b, entonces f es Riemann integrable si y sólo si E es Jordan medible y, en ese caso, se tiene $\int_a^b f(x)dx = c(E)$, Lebesgue observó que cuando el conjunto E es (Lebesgue) medible se puede definir la integral de f como $\int_a^b f(x)dx = m(E)$. Automáticamente, esta definición resulta ser una extensión de la integral de Riemann pues si E es Jordan medible también es Lebesgue medible, pero hay conjuntos Lebesgue medibles que no son Jordan medibles. Una vez formulada esta definición geométrica de la integral, Lebesgue se planteó el problema de caracterizar a las funciones integrables y de llegar a la definición de la integral por la vía analítica. El primer problema lo resolvió demostrando el siguiente resultado:

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada no negativa, entonces el conjunto

$$E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in[a,b] \ \text{ y } \ y\in[0,f(x)]\}$$

es medible si y sólo si el conjunto $\{x\in[a,b]:f(x)>\alpha\}$ es medible para cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$.

σ-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$

Recordemos que el conjunto de los números reales extendidos, denotado por $\overline{\mathbb{R}}$, es el conjunto $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ y que seguimos las siguientes convenciones:

Si $c \in \mathbb{R}$, entonces:

$-\infty < c < \infty$,

$c - \infty = -\infty$,

$c + \infty = \infty$,

$c\,(\infty) = \infty$ si $c > 0$,

$c\,(\infty) = -\infty$ si $c < 0$,

$(0)\,(\infty) = (0)\,(-\infty) = 0$,

$\frac{c}{\infty} = \frac{c}{-\infty} = 0$,

$(\infty)\,(\infty) = \infty + \infty = \infty$,

$\infty - \infty$ e $\frac{\infty}{\infty}$ no están definidos.

El conjunto de números reales $\mathbb{R}$ también será denotado por $(-\infty, \infty)$. El conjunto de números reales no negativos será denotado por $[0, \infty)$, o por $\mathbb{R}^+$, y $\overline{\mathbb{R}}^+$ denotará al conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

Recordemos también que la σ-álgebra $\mathfrak{B}\,(\mathbb{R})$ de los conjuntos borelianos de $\mathbb{R}$ está generada por cualquiera de las siguientes familias de conjuntos.

1. Los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$.
2. Los intervalos de la forma $(-\infty, x)$, donde $x \in \mathbb{R}$.
3. Los intervalos de la forma $(a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
4. Los intervalos de la forma $[a, b)$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.
5. Los intervalos de la forma (a, b), donde $a, b \in \mathbb{R}$.
6. Lo intervalos de la forma $[a, b]$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

Definición 1 ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$). *La σ-álgebra de Borel en $\overline{\mathbb{R}}$, la cual será denotada por $\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$, es la σ-álgebra de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ generada por la familia de intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \overline{\mathbb{R}}$. A los elementos de esa σ-álgebra los llamaremos borelianos de $\overline{\mathbb{R}}$.*

Proposición 1. *Los conjuntos* $\{\infty\}$, $\{-\infty\}$ *y* $\{-\infty, \infty\}$ *son borelianos de* $\overline{\mathbb{R}}$.

Demostración

$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$

$\{\infty\} = (-\infty, \infty] - \mathbb{R} \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$

$\{-\infty\} = \overline{\mathbb{R}} - (-\infty, \infty] \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$

$\blacksquare$

Proposición 2. *La* σ*-álgebra de Borel en* $\overline{\mathbb{R}}$ *está formada los borelianos de* $\mathbb{R}$ *y los conjuntos de la forma* $B \cup \{\infty\}$, $B \cup \{-\infty\}$ *y* $B \cup \{-\infty, \infty\}$, *donde* B *es un boreliano de* $\mathbb{R}$.

Demostración

Sea $\mathcal{H}$ la familia de conjuntos formada por los borelianos de $\mathbb{R}$ y los conjuntos de la forma $B \cup \{\infty\}$, $B \cup \{-\infty\}$ y $B \cup \{-\infty, \infty\}$, donde B es un boreliano de $\mathbb{R}$.

Todos los elementos de $\mathcal{H}$ son borelianos de $\overline{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra que contiene a todos los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, donde $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

$\blacksquare$

Proposición 3. *La* σ*-álgebra* $\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$ *de los conjuntos borelianos de* $\overline{\mathbb{R}}$ *está generada por cualquiera de las siguientes familias de conjuntos.*

1. *Los intervalos de la forma* $[-\infty, x]$, *donde* $x \in \mathbb{R}$.
2. *Los intervalos de la forma* $[-\infty, x]$, *donde* $x \in \overline{\mathbb{R}}$.
3. *Los intervalos de la forma* $[-\infty, x)$, *donde* $x \in \mathbb{R}$.
4. *Los intervalos de la forma* $[-\infty, x)$, *donde* $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Demostración

1. Para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$[-\infty, x] = (-\infty, x] \cup \{-\infty\} \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

Sea J la familia de intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$ de la forma $[-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$. Entonces:

$\{-\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [-\infty, -n] \in \sigma(J)$

$(-\infty, \infty] = \overline{\mathbb{R}} - \{-\infty\} \in \sigma(J)$

Finalmente, si $x \in \mathbb{R}$, entonces:

$(-\infty, x] = [-\infty, x] - \{-\infty\} \in \sigma(J)$

2. Se sigue de 1.

3. Sea I la familia de intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$ de la forma $[-\infty, x)$, donde $x \in \mathbb{R}$, y J la familia de intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$ de la forma $[-\infty, x]$, donde $x \in \mathbb{R}$. Entonces, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se tiene:

$[-\infty, x) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-\infty, x - \frac{1}{n}\right] \in \sigma(J)$

$[-\infty, x] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[-\infty, x + \frac{1}{n}\right) \in \sigma(I)$

Así que $\sigma(I) = \sigma(J) = \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.

4. Se sigue de 3.

■

Funciones Lebesgue medibles

Definición 2. *Diremos que una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier conjunto $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.*

Definición 3. *Diremos que una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier conjunto $B \in \mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right)$.*

Proposición 4. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}$ tal que $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{A})$. Entonces una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible si y sólo si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $B \in \mathcal{A}$.*

Demostración

La familia $\{B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})\}$ es una σ-álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$ la cual contiene a $\mathcal{A}$, por lo tanto contiene a $\sigma(\mathcal{A})$.

■

Proposición 5. *Sea $\mathcal{A}$ una familia de subconjuntos de $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $\mathfrak{B}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) = \sigma(\mathcal{A})$. Entonces una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si $f^{-1}(B) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ para cualquier $B \in \mathcal{A}$.*

Teorema 1. *Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es medible si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes propiedades:*

1. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq y]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualquier* $y \in \mathbb{R}$.
2. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < y\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualquier* $y \in \mathbb{R}$.
3. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (a, b]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.
4. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, b)\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.
5. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (a, b)\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.
6. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [a, b]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualesquiera* $a, b \in \mathbb{R}$.

Teorema 2. *Una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible si y sólo si se cumple cualquiera de las siguientes propiedades:*

1. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in (-\infty, y]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualquier* $y \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualquier* $y \in \overline{\mathbb{R}}$.
3. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y)\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualquier* $y \in \overline{\mathbb{R}}$.
4. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y]\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualquier* $y \in \mathbb{R}$.
5. $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in [-\infty, y)\} \in \mathfrak{L}(\mathbb{R})$ *para cualquier* $y \in \mathbb{R}$.

Obsérvese que si una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces los conjuntos $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \infty\}$ y $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = -\infty\}$ son medibles. Así que también el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$ es medible.

Si $\mathbb{F}$ es un conjunto cualquiera y f y g son dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\overline{\mathbb{R}}$, vamos a considerar a la suma de f y g como la función $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{si } f(x) + g(x) \text{ está definida} \\ 1 & \text{si } f(x) + g(x) \text{ no está definida} \end{cases}$$

Esta convención se traslada a la resta de dos funciones ya que $f - g = f + (-g)$.

En la siguiente proposición, se utiliza un método que es bastante común para algunas demostraciones. De manera general, cuando se tiene una familia finita, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de subconjuntos de un conjunto $\mathbb{E}$, resulta cómodo trabajar con esos conjuntos si se encuentra una partición de E formada por conjuntos ajenos por parejas, de tal manera que cada uno de los conjuntos A_k, así como su complemento, se puedan expresar como unión de conjuntos de esa partición, además de que, dado un elemento $x \in \mathbb{E}$, permita determinar a qué conjuntos A_k pertenece.

La idea para logra esto es simple, tal vez únicamente se complica un poco en el caso general, por los índices que hay que manejar. Vamos a seguir el método, paso a paso, para hacerlo más sencillo de entender.

Si A_1 y A_2 son subconjuntos de $\mathbb{E}$, podemos partir $\mathbb{E}$ en los siguientes conjuntos:

$A_1 \cap A_2$

$A_1 \cap A_2^c$

$A_1^c \cap A_2$

$A_1^c \cap A_2^c$

Se tiene entonces:

$(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$

$= [(A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)] \cup [(A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)]$

$= [A_1 \cap (A_2 \cup A_2^c)] \cup [A_1^c \cap (A_2 \cup A_2^c)]$

$= A_1 \cup A_1^c = \mathbb{E}$

$A_1 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_2^c)$

$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2)$

$A_1^c = (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$

$A_2^c = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c)$

Si A_1, A_2 y A_3 son subconjuntos de $\mathbb{E}$, podemos partir $\mathbb{E}$ en los siguientes conjuntos:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3$

$A_1 \cap A_2 \cap A_3^c$

$A_1 \cap A_2^c \cap A_3$

$A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c$

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3$

$A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c$

$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3$

$A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c$

En general, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos de $\mathbb{E}$, podemos partir $\mathbb{E}$ en los siguientes conjuntos:

$\{B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n : B_k \in \{A_k, A_k^c\}\,,\ k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$

Proposición 6. *Toda función $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ de la forma $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{E_k}$, donde $m \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_m$ son números reales y $E_1, \ldots, E_m$ son conjuntos medibles, es medible.*

Demostración

Los conjuntos de la forma $F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$, donde $F_k \in \{E_k, E_k^c\}$ y $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, constituyen una partición de $\mathbb{R}$.

Sea $\mathbb{H}$ la familia de conjuntos no vacíos que son de esa forma.

Se tiene entonces:

1. F es medible para cualquier $F \in \mathbb{H}$.

2. Si $F, G \in \mathbb{H}$ y $F \neq G$, entonces $F \cap G = \emptyset$.

3. $\cup \{F \subset \mathbb{R} : F \in \mathbb{H}\} = \mathbb{R}$

4. Para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$E_k = \cup \{F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \in \mathbb{H} : F_k = E_k\}$

Si $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n \in \mathbb{H}$, definamos:

$t_F^{(k)} = \begin{cases} b_k & \text{si } F_k = E_k \\ 0 & \text{si } F_k = E_k^c \end{cases}$, para $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

$t_F = \sum_{k=1}^{n} t_F^{(k)}$

Entonces:

$\varphi(x) = t_F$ para cualquier $x \in F$, así que:

$\varphi = \sum_{F \in \mathbb{H}} t_F I_F$

Finalmente, si $\varphi(\mathbb{R}) = \{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$, entonces, para cualquier $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $\varphi^{-1}(\{t_j\})$ es una unión finita de conjuntos en $\mathbb{H}$. Por lo tanto, para cualquier $y \in \mathbb{R}$, $\varphi^{-1}([-\infty, y])$ también es una unión finita de conjuntos en $\mathbb{H}$. Así que φ es medible.

■

Definición 4. *Diremos que una función medible $\varphi : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es simple si tiene la forma $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{E_k}$, donde $b_1, \ldots, b_m$ son números reales y $E_1, \ldots, E_m$ son conjuntos medibles.*

El resultado siguiente es la base para la definición de la integral de una función medible no negativa y también para demostrar algunas de las propiedades de las funciones medibles, así como de sus integrales.

Teorema 3. *Sea $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible no negativa, entonces existe una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$.*

Demostración

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos:

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sum_{m=1}^{n2^n} \frac{m-1}{2^n} I_{\left\{y \in \mathbb{F} : \frac{m-1}{2^n} \leq f(y) < \frac{m}{2^n}\right\}}(x) & \text{si } f(x) < n \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

Obsérvese que aunque, para cada $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < n$, $\varphi_n(x)$ es una suma, únicamente uno de los términos es distinto de cero.

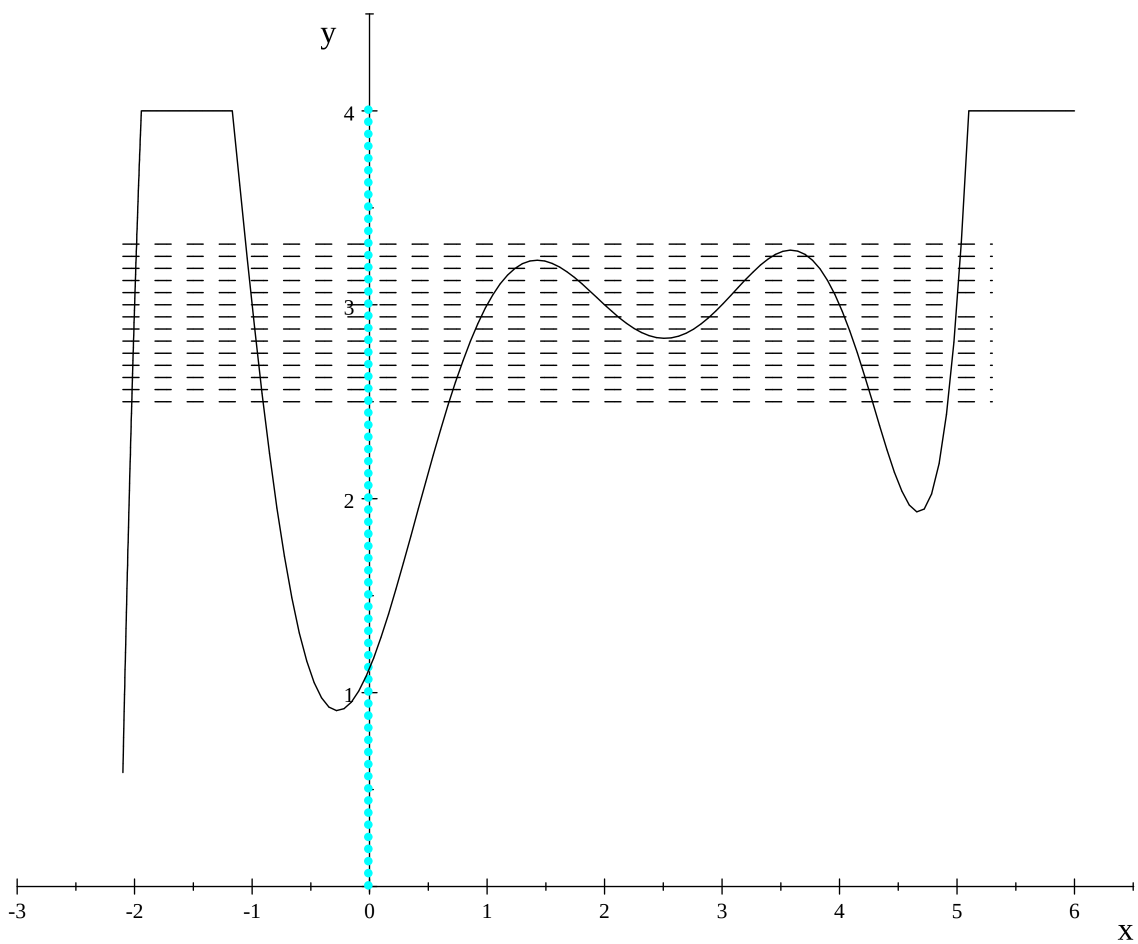
También podríamos escribir la definición de φ_n de la siguiente manera:

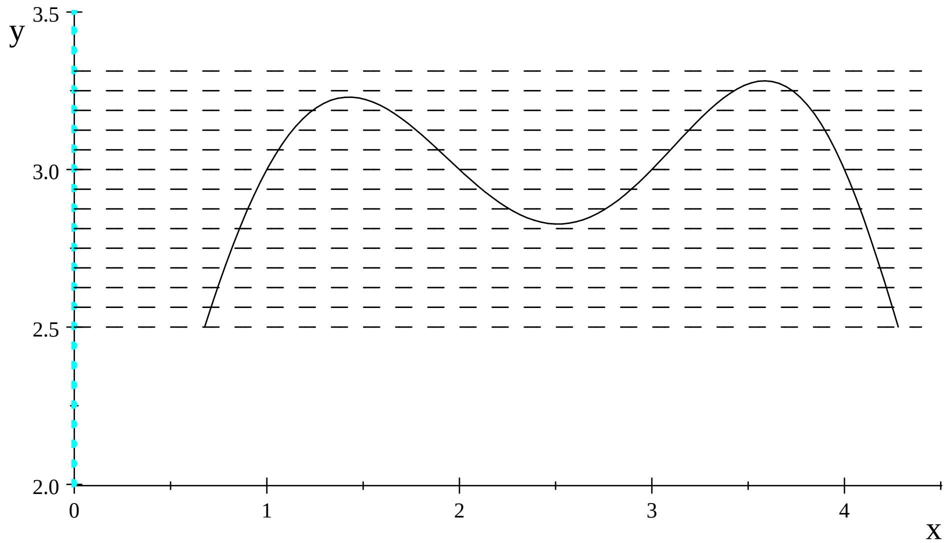
$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{m-1}{2^n} & \text{si } \frac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{m}{2^n} \text{ y } m \in \{1, 2, \ldots, n2^n\} \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

Por ejemplo, en la siguiente figura se muestra la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por:

$$f(x) = \frac{1}{2^7}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)+3$$

Si consideramos, a manera de ejemplo, $n = 4$,el intervalo $[0, 4)$, sobre el eje y, se parte en subintervalos de longitud $\frac{1}{2^4}$.





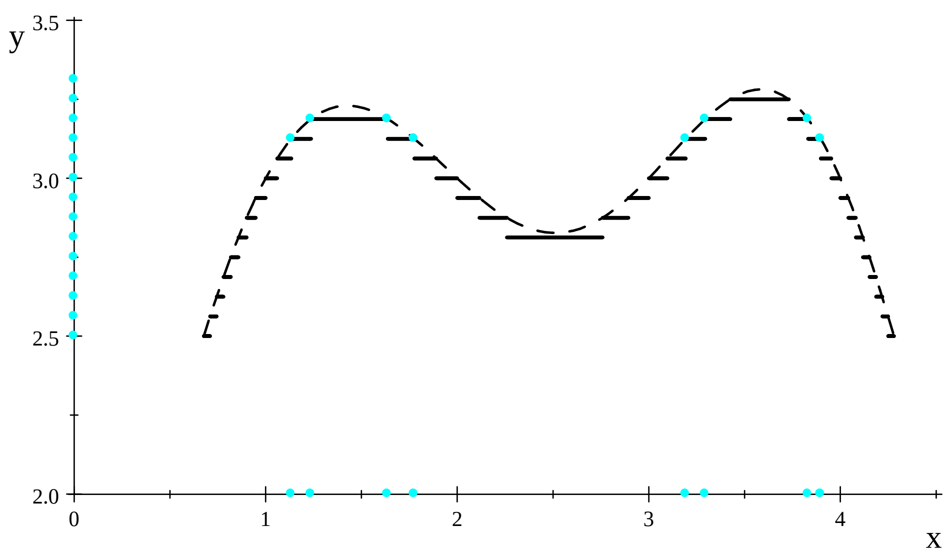
Entonces, por ejemplo:

$f^{-1}\left[\left[\frac{50}{2^4},\frac{51}{2^4}\right)\right]=[1.134,1.237)\cup[1.637,1.776)\cup[3.193,3.295\,)\cup[3.831,3.898\,)$

Así que:

$\varphi_4(x)=\frac{50}{2^4}$ si $x\in[1.134,1.237)\cup[1.637,1.776)\cup[3.193,3.295\,)\cup[3.831,3.898\,)$

En la siguiente figura se muestran las gráficas de f y de φ_4 para valores de f en el intervalo $\left[\frac{40}{16},\frac{53}{16}\right)$.



Pasemos ahora a la demostración del enunciado del teorema:

Si $f(x) = \infty$, entonces $\varphi_n(x) = n$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$, así que:

$\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ y $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} \varphi_n(x) = \infty = f(x)$.

Si $f(x) < n$ para alguna $n \in \mathbb{N}$, sea m el único número natural tal que $\frac{m-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{m}{2^n}$. Entonces, como $\varphi_n(x) = \frac{m-1}{2^n}$, se tiene:

$f(x) - \frac{1}{2^n} < \varphi_n(x) \leq f(x)$, así que $\lim_{n \rightsquigarrow \infty} \varphi_n(x) = f(x)$.

Ahora bien, como $\frac{2(m-1)}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2m}{2^{n+1}}$, se tiene que $\frac{2m-2}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2m-1}{2^{n+1}}$ o bien $\frac{2m-1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2m}{2^{n+1}}$.

En el primer caso, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \frac{m-1}{2^n} = \varphi_n(x)$$

En el segundo, se tiene:

$$\varphi_{n+1}(x) = \frac{2m-1}{2^{n+1}} > \frac{2m-2}{2^{n+1}} = \varphi_n(x)$$

Así que, en cualquier caso, $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$.

Así que, φ_n es una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ para cualquier $x \in \mathbb{F}$.

■

Si $\varphi = \sum_{k=1}^{m} b_k I_{G_k}$ es una función simple entonces el conjunto de los valores que toma es finito. Sea $\{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto formado por todos los distintos posibles valores no nulos de φ y, para $k \in \{1, \ldots, n\}$, sea $E_k = \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = a_k\}$, entonces los conjuntos $E_1, \ldots, E_n$ son ajenos por parejas y $\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k I_{E_k}$. Esta última sumatoria será llamada la **representación canónica** de φ.

Ahora demostraremos las propiedades básicas de las funciones medibles con valores en $\overline{\mathbb{R}}$.

Proposición 7. *Sea $g_1 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, … una sucesión de funciones medibles, entonces:*

1. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, las funciones* $\min\{g_1, \ldots, g_n\}$ *y* $\max\{g_1, \ldots, g_n\}$ *son medibles.*
2. *Las funciones* $\inf\{g_1, g_2, \ldots\}$ *y* $\sup\{g_1, g_2, \ldots\}$ *son medibles.*

Demostración

Para cualquier $y \in \mathbb{R}$, se tiene:

$\{x \in \mathbb{R} : \text{mín}\,\{g_1, \ldots, g_n\}\,(x) \geq y\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in \mathbb{R} : g_k(x) \geq y\} \in \mathfrak{L}\,(\mathbb{R})$,

$\{x \in \mathbb{R} : \text{máx}\,\{g_1, \ldots, g_n\}\,(x) \leq y\} = \bigcap_{k=1}^{n} \{x \in \mathbb{R} : g_k(x) \leq y\} \in \mathfrak{L}\,(\mathbb{R})$,

$\{x \in \mathbb{R} : \text{ínf}\,\{g_1, g_2, \ldots\}\,(x) \geq y\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : g_k(x) \geq y\} \in \mathfrak{L}\,(\mathbb{R})$,

$\{x \in \mathbb{R} : \sup\,\{g_1, g_2, \ldots\}\,(x) \leq y\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{R} : g_k(x) \leq y\} \in \mathfrak{L}\,(\mathbb{R})$,

de lo cual se sigue el resultado. ∎

Corolario 1. *Sea $f_1 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ... una sucesión de funciones medibles, entonces las funciones* $\text{lím ínf}\, f_n$ *y* $\text{lím sup}\, f_n$ *son medibles.*

Demostración

La sucesión $g_n = \text{ínf}\,\{f_j : j \geq n\}$ es no decreciente y:

$\text{lím ínf}_{n \rightsquigarrow \infty} f_n = \text{lím}_{n \rightsquigarrow \infty} g_n = \sup\,\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Así que $\text{lím ínf}_{n \rightsquigarrow \infty} f_n$ es medible.

La sucesión $h_n = \sup\,\{f_j : j \geq n\}$ es no creciente y:

$\text{lím sup}\, f_n = \text{lím}_{n \rightsquigarrow \infty} h_n = \text{ínf}\,\{h_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Así que $\text{lím sup}\, f_n$ es medible.

∎

Corolario 2. *Sea $g_1 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, $g_2 : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, ... una sucesión de funciones medibles tales que* $\text{lím}_{n \rightsquigarrow \infty} g_n(x)$ *existe para cualquier $x \in \mathbb{F}$, entonces la función $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida por* $g(x) = \text{lím}_{n \to \infty} g_n(x)$ *es medible.*

Lema 1. *Si una función $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ es medible, entonces f^+ y f^- son medibles.*

Demostración

La función idénticamente cero es medible, así que entonces $f^+ = \text{máx}\,\{f, 0\}$, es medible.

Para cualquier $y \in \mathbb{R}$, se tiene $\{x \in \mathbb{R} : [-f]\,(x) \leq y\} = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq y\}$, así que la función $-f$ es medible. Por lo tanto, $f^- = \text{máx}\,\{-f, 0\}$ es medible.

∎

Proposición 8. *Sean $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles y $c \in \mathbb{R}$. Entonces las funciones $f + c$, cf y fg son medibles.*

Demostración

Sean φ_n, Φ_n, ϕ_n y Ψ_n sucesiones no decrecientes de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f^+(x)$, $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \Phi_n(x) = f^-(x)$, $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \phi_n(x) = g^+(x)$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \Psi_n(x) = g^-(x)$, respectivamente, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Las funciones $\varphi_n - \Phi_n + c$, $c\varphi_n - c\Phi_n$ y $\varphi_n\phi_n + \Phi_n\Psi_n - \varphi_n\Psi_n - \Phi_n\phi_n$ son simples y se tiene:

$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} [\varphi_n - \Phi_n + c](x) = f(x) + c$,

$[c\varphi_n - c\Phi_n](x) = cf(x)$,

$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} [\varphi_n\phi_n + \Phi_n\Psi_n - \varphi_n\Psi_n - \Phi_n\phi_n](x)$

$= \lim_{n\rightsquigarrow\infty} [\varphi_n - \Phi_n](x) [\phi_n - \Psi_n](x) = [fg](x)$.

Así que $f + c$, cf y fg son medibles.

■

El siguiente resultado básicamente expresa que la suma de dos funciones medibles es medible. Sin embargo hay que formularlo bien pues al tratarse de funciones con valores en $\overline{\mathbb{R}}$, la suma de las dos funciones podría no estar definida en algunos puntos.

Proposición 9. *Sean $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ dos funciones medibles y $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $h(x) = f(x) + g(x)$ en todos los puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) + g(x)$ esté definida y h es constante en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) + g(x)$ no esté definida. Entonces h es medible.*

Demostración

Sean φ_n, Φ_n, ϕ_n y Ψ_n sucesiones no decrecientes de funciones simples no negativas tales que $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = f^+(x)$, $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \Phi_n(x) = f^-(x)$, $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \phi_n(x) = g^+(x)$ y $\lim_{n\rightsquigarrow\infty} \Psi_n(x) = g^-(x)$, respectivamente, para cualquier $x \in \mathbb{R}$.

Denotemos por Γ al conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) + g(x)$ no está definida.

Γ es medible, las funciones $\varphi_n - \Phi_n + \phi_n - \Psi_n$ son simples y, para cualquier $x \in \Gamma^c$, se tiene:

$\lim_{n\rightsquigarrow\infty} [\varphi_n - \Phi_n + \phi_n - \Psi_n](x)$

$= \lim_{n\rightsquigarrow\infty} [\varphi_n - \Phi_n + \phi_n - \Psi_n](x) = f(x) + g(x) = h(x)$.

Así que hI_{Γ^c} es medible.

Sea $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ el valor constante que toma h en el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ para los cuales $f(x) + g(x)$ no está definida.

Si B es un boreliano de $\overline{\mathbb{R}}$, se tiene:

$$h^{-1}(B) = \begin{cases} (hI_{\Gamma^c})^{-1}(B) & \text{si } \gamma \notin B \\ \left[(hI_{\Gamma^c})^{-1}\right] \cup \Gamma & \text{si } \gamma \in B \end{cases}$$

Así que h es medible.

■

Vamos a establecer la convención de considerar a la suma de dos funciones $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ como la función $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ definida de la siguiente manera:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{si } f(x) + g(x) \text{ está definida} \\ 1 & \text{si } f(x) + g(x) \text{ no está definida} \end{cases}$$

Así que, de acuerdo con la proposición anterior se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3. *Si $f : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ y $g : \mathbb{F} \to \overline{\mathbb{R}}$ son dos funciones medibles, entonces $f + g$ es medible.*

Teorema 4. *Sean $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función medible y $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ una función tal que $g = f$ excepto a lo más en un conjunto de medida cero, entonces g es medible.*

Demostración

Sea $E = \{x \in \mathbb{R} : g(x) = f(x)\}$, entonces, para cualquier $y \in \mathbb{R}$, se tiene.

$\{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq y\}$

$= (\{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq y\} \cap E) \cup (\{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq y\} \cap E^c)$

$= (\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq y\} \cap E) \cup \{x \in E^c : g(x) \leq y\}$.

El conjunto $\{x \in E^c : g(x) \leq y\}$ está contenido en un conjunto de medida cero, por lo tanto es medible. Así que $\{x \in \mathbb{R} : g(x) \leq y\}$ es medible.

■